Übungsstunde lineare Algebra:

Heutige Themen:

- Übungsstunden Organisation
- lineare Gleichungssysteme
- Zeilenstufenform
- Gaussverfahren
- Eigenschaften des Gaussverfahrens
- Matrizen & Matrizenrechenregeln
- Die LR-Zerlegung

Organisation:

- E-Mail: michbaum@student.ethz.ch
- Slack Gruppe beitreten!
- Webseite: www.n.ethz.ch/~michbaum (Ihr habt auch alle eine Webseite!)
- Empfehlenswerte Video-Reihe: 3B1B "Essence of Linear Algebra"
- Übungsabgabe:
  - ↳ Online in der Polybox
  - ↳ Deadline Freitag 18:00
  - ↳ Notenbonus von 0.25 falls >75% aller Übungen "vernünftig" gelöst
  - ↳ Filename: "LinAlg Übung # Vorname Nachname"
- Übung wird online via Zoom gestreamt

Lineare Gleichungssysteme:

Explizite Form:

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

Beispiel 1.1:

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 - 4x_2 = 0 \end{array}\right|$$

- **Matrixschreibweise:** Es gilt $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{b}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Beispiel 1.2: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Obere Dreiecksform / Zeilenstufenform: (ZSF)**

Ein LGS kann immer in die ZSF gebracht werden:

$$\begin{array}{l} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ 0 \quad + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ 0 + 0 + \cdots \qquad \vdots \\ \vdots \\ 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + a'_{mn}x_n = b'_m \end{array}$$

Beispiel 1.3:

$$\begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 3 \\ 0 + 0 + 4x_3 + 0 = 2 \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 1 \end{array}$$

oder in Matrixform:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Gaussverfahren:

Das wichtigste Verfahren in der Vorlesung.

Ziel: LGS auf ZSF bringen, um es anschliessend durch Rückwärtseinsetzen lösen zu können.

↳ Erlaubte Operationen:
- Vertauschen von Zeilen/Spalten
- Vielfaches einer Zeile/Spalte zu einer anderen addieren

↳ Mögliche Lösungen:
- Eindeutige Lösung
- Unendlich viele Lösungen
- Keine Lösung

Beispiel 1.6: $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Pivot-variablen

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III}-2\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III}-2\text{II}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boxed{x_1} & \boxed{x_2} & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Pivot-Elemente

Kompatibilitäts-bedingung

$$\Rightarrow x_3 = \underline{t},\ t \in \mathbb{R},\ x_2 = \underline{1-2t},\ x_1 = \underline{3t-2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \underline{\underline{\left\{ \begin{bmatrix} 3t-2 \\ 1-2t \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}}}$$

Nachtrag Lösungsmenge mit span ausdrücken:

Nur möglich bei homogenen Systemen wie folgt:

Beispiel: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Gauss $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \iff \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 0x_2 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \underline{-2t} \\ x_2 = \underline{t} \in \mathbb{R} \end{array}$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \Big\{ \underbrace{t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}} \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; t \in \mathbb{R} \Big\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}$$

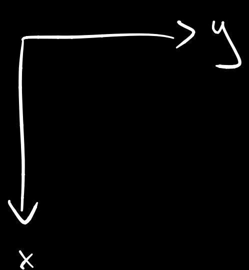
Der Parameter kann in solchen Fällen immer ausgeklammert werden!

- Eigenschaften von LGS:
  - Ein LGS mit $\underline{b} = 0$ heisst homogenes LGS (HLGS)
  - Die # Zeilen/Spalten, welche in der ZSF ungleich 0 sind, bestimmen den Rang der Matrix
  - Die Dimension einer Matrix bezeichnet man folgendermassen:

    $\underline{\underline{A}}^{m \times n}$ bedeutet, dass A

    - m Zeilen
    - n Spalten

Tipp: Das "Koordinatensystem einer Matrix ist ein um 90° gekipptes, kartesisches Koordinatensystem:



$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{cc} & \overset{j}{\longrightarrow} \\ & \overset{n}{\longrightarrow} \\ \begin{array}{c} \downarrow \; \downarrow \\ i \;\; m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ a_{31} & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrizen & Matrizenrechenregeln:

- Addition: $(A^{m\times n} + B^{m\times n} = C^{m\times n})$

  Man addiert elementweise:

  Beispiel: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 4 & 10 & 16 \end{bmatrix}}}$

  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$ ↯

- Skalarmultiplikation: $(\alpha \cdot A^{m\times n} = C^{m\times n})$ $\alpha \in \mathbb{R}$

  Man multipliziert elementweise:

  Beispiel:

  $$2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}}}$$

- annulieren

  Matrixmultiplikation: $(A^{m\times \boxed{n}} \cdot B^{\boxed{n}\times p} = C^{m\times p})$

  Bilden das "Skalarprodukt" der Zeilenvektoren von A und der Spaltenvektoren von B.

  Beispiel:

  $$\begin{array}{c} n \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{cc} n & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

  $$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 & 13 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix}}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \lightning$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{11}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$